Domácí úkol ze cvičení 11.

1. a) Ukažte, že rovnicí $x^2 - y^3 + x^2 y - 1 = 0$ (*)

   a podmínkou $y(1) = 0$ je definována v okolí bodu $(1,0)$ implicitní funkce $y = y(x)$, $y(x) \in C^2(U(1))$.

   b) Vypočítejte $y'(1)$ a $y''(1)$.

   c) Napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí (*), v bodě $(1,0)$.

   d) Aproximujte funkci $y(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$ Taylorovým polynomem 2.stupně.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ na množině M, je-li:

   a) $M = R^2$; b) $M = \{(x,y);\ x^2 \le y \le 4\}$.

A příklady k promyšlení na cvičení 12:

Implicitní funkce:

1. a) Dokažte, že rovnicí $2x^2 + 2y^2 + z^3 + 8xz - z + 8 = 0$

   je definována v okolí bodu $(-2,0,1)$ implicitní funkce $z = f(x,y), f \in C^2(U(-2,0))$.

   b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ stacionárním bodem funkce $f(x,y)$.

   c) Nabývá funkce $z = f(x,y)$ v bodě $(-2,0)$ lokální extrém?

2. a) Nechť funkce F(x, y, z) má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) a nechť platí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x, y, z) = 0$, v bodě (x_0, y_0, z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0, y_0, z_0) nenulová.

   b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí

   $$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0 \ .$$

Extrémy :

1. Vyšetřete v R^2 globální a lokální extrémy následujících funkcí:

   a) $f(x,y) = 12xy - x^2 y - xy^2$;

   b) $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3$;

   c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M, je-li:

   a) $f(x,y) = xy^2$, $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$;

   b) $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$, $M = \{(x,y);\ x^2 + y^2 \le 1\}$.